Кореляційний аналіз

**1. Коваріація**

Розглянемо довільний двовимірний випадковий вектор з компонентами , для яких відомі їх сподівання і дисперсії: , , , : і нехай  деяка стала, .

**Задача.** Знайти зв’язок між компонентам та  двовимірного випадкового вектора?

З цією метою утворимо з координат цього вектора випадкову змінну

.

Знайдемо її дисперсію: за означенням дисперсії та властивостями сподівання маємо:







.

Отже,

. (1)

З другого доданку (1) отримуємо наступне означення.

**Означення 1. Коваріацією** між випадковими змінними та  називають сподівання добутку відхилень цих змінних від своїх сподівань (або другому змішаному центральному моменту цих змінних), тобто

. (2)

З цього означення безпосередньо випливає, що коваріація є симетричною функцією за змінними  та , тобто

.

Якщо та  – незалежні випадкові змінні , то .

Справді, для незалежних випадкових змінних маємо .

Оскільки коваріація між незалежними випадковими змінними дорівнює нулю, то для залежних випадкових змінних коваріацію можна прийняти за міру залежності.

**2. Кореляція**

Коваріація між компонентами випадкового вектора вимірюється тими ж одиницями, що і добуток компонент. Але іноді треба мати абстрактну міру залежності між випадковими змінними. Вони одержуються діленням коваріації на добуток стандартів цих змінних. Одержану міру називають **кореляцією** і позначають через .

**Означення.** **2.** **Кореляцією** між випадковими змінними  та  називають відношення коваріації між змінними  до стандартів цих змінних

.

З цього означення випливає, що кореляція є симетричною функцією, тобто.

Якщо  та  незалежні випадкові змінні, то .

Це випливає з того, що для незалежних випадкових змінних, коваріація дорівнює нулю, та з означення кореляції.

У термінах коваріації дисперсія (1) випадкової змінної  запишеться у вигляді:

,

а в термінах кореляції – таким чином:

. (3)

**3. Регресія**

Знайдемо таке , при якому випадкова змінна має найменшу дисперсію. Для цього дисперсію (3) розглядатимемо як функцію параметра .

. (4)

Обчислимо перші дві похідні за параметром . З виразу (4), отримаємо

.

Оскільки друга похідна додатна, то при



з (4), отримаємо, що дисперсія випадкової змінної  набуває мінімального значення

. (5)

Значення, що мінімізує дисперсію випадкової змінної  називають **регресією** на .

**Означення 3. Регресією** випадкової змінної  на  називають добуток кореляції між цими змінними на відношення стандарту випадкової змінної  до стандарту випадкової змінної 

. (6)

З означення рівності (6) випливає, що регресія не є симетричною відносно випадкових змінних. Справді, регресія випадкової змінної  на  визначається як

. (7)

Якщо кореляція між його координатами дорівнює нулю ( ), або стандарти координат випадкового вектора  рівні між собою, то регресія буде симетричною

.

Якщо  і  – незалежні випадкові змінні і кореляція між ними дорівнює нулю, то .

Із рівностей (6), (7) випливає, що знаки кореляції та регресії однакові, а добуток регресій дорівнює квадрату кореляції.



.

Розглянемо іншу випадкову змінну:

, .

Її дисперсія є такою:

,

а тому своє мінімальне значення

 (8)

вона набуває при:

,

де регресія першої координати випадкового вектора  не другу його координату.

Із невід’ємності дисперсії та з виразів (5), (8) випливає, що



тобто .

1. ***Лінійно-залежні та некорельовані випадкові змінні***

Нехай . З (5), (8) випливає, що тоді  та . Це означає, що в цьому випадку з ймовірністю рівною одиниці випадкові змінні  та  є константами. Нехай вони є відповідно  та . Тоді , тобто

, (9)

, (10)

де . Отже, тоді  є лінійною функцією змінної  і навпаки. Очевидно, що в загальному випадку це різні функції.

**Означення 3.** Компоненти випадкового вектора  лінійно-залежні, якщо вони пов’язані співвідношеннями (9), або (10)

**Означення 4.** Компоненти випадкового вектора  називають некорельованими, якщо кореляція між ними дорівнює нулю.

**Примітка.** Можна навести приклад, у якому некорельовані випадкові змінні не обовязково є незалежними.

Нехай . Покажемо, що у співвідношенні

 (11)

випадкові змінні  та  некорельовані, тобто  або . Справді за означенням (2) маємо



.

Таким чином вираз (11) вказує на розклад випадкової змінної  на суму двох некорельованих випадкових змінних  та .

Із некорельованості випадкових змінних  та  у формулі (11) випливає, що дисперсія суми двох випадкових змінних дорівнює сумі дисперсій доданків

.

Звідси випливає, що

. (12)

Тотожність (12) вказує на розклад дисперсії випадкової змінної  на частини, відповідні некорельованим доданкам у формулі (11). Отже, квадрат кореляції 

між випадковими змінними  та  у формулі (12) вказує на те, яка частина дисперсії випадкової змінної  припадає на доданок, пропорціональний до випадкової змінної  у формулі (11).

Аналогічно можна показати, що у співвідношенні



випадкові змінні  та  є некорельованими.

**Зауваження.** Властивості кореляції між двома випадковими змінними  та  нагадують властивості косинуса кута між двома векторами  та 

Встановимо відповідність між випадковими змінними та векторами. Для цього звернемо увагу на таку аналогію між кореляцією  та величинами , де  - деякі вектори:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| 1 | Кореляція симетрична за змінними  та : | Косинус-парна функція |
| 2 | Кореляція між незалежними випадковими змінними  та  дорівнює нулю: | Косинус кута між ортогональними векторами дорівнює нулю: |
| 3 | Кореляція набуває значення від -1 до +1: | Косинус кута між двома векторами набуває значення від -1 до +1: |
| 4 | якщо  та  лінійно залежні |  |
| 5 | якщо  та  лінійно залежні |  |

Наявність описаної аналогії між кореляцією і косинусом дає можливість будь - які дві випадкові змінні схематично зобразити на площині двома векторами, що мають довжини рівні відповідним стандартам цих змінних і виходять з однієї точки під кутом, косинус якого дорівнює кореляції між цими змінними. Тоді співвідношення між випадковими змінними можна виразити геометрично та всі дослідження здійснювати відповідними методами геометрії.